

УДК 621.833

И. Галко, С. Павленко

Технический университет Кошице, факультет производственных технологий, г. Прешов, Республика Словакия

## ПРОЕКТНЫЙ ПРОЧНОСТНОЙ РАСЧЁТ ЗУБЬЕВ ЦИКЛОИДНО-ЦЕВОЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Статья посвящена проекту прочностного расчёта зубьев циклоидно-цевочной передачи на усталость при изгибе и контактную прочность, а также проекту расчёта при однократном нагружении при изгибе и в контакте. Представлены некоторые результаты научно-исследовательской работы в области новых приводных механизмов на кафедре проектирования технологических устройств факультета производственных технологий Технического университета г. Кошице (Словакия).

Статья подготовлена при поддержке гранта KEGA ě . 058TUKE-4/2012.

**Введение.** Содержанием статьи является проектный прочностной расчёт на усталость при изгибе и на контактную прочность зубьев циклоидно-цевочной передачи (С-Е-передача), а также проверочный расчёт циклоидной передачи при однократном нагружении на изгиб, соответственно, при однократном контакте. Статья представляет часть решения проблемы специальных зубчатых механизмов в целях внедрения для приводов машиностроительных устройств производственной техники. Результаты исследований будут опубликованы в дальнейших статьях.

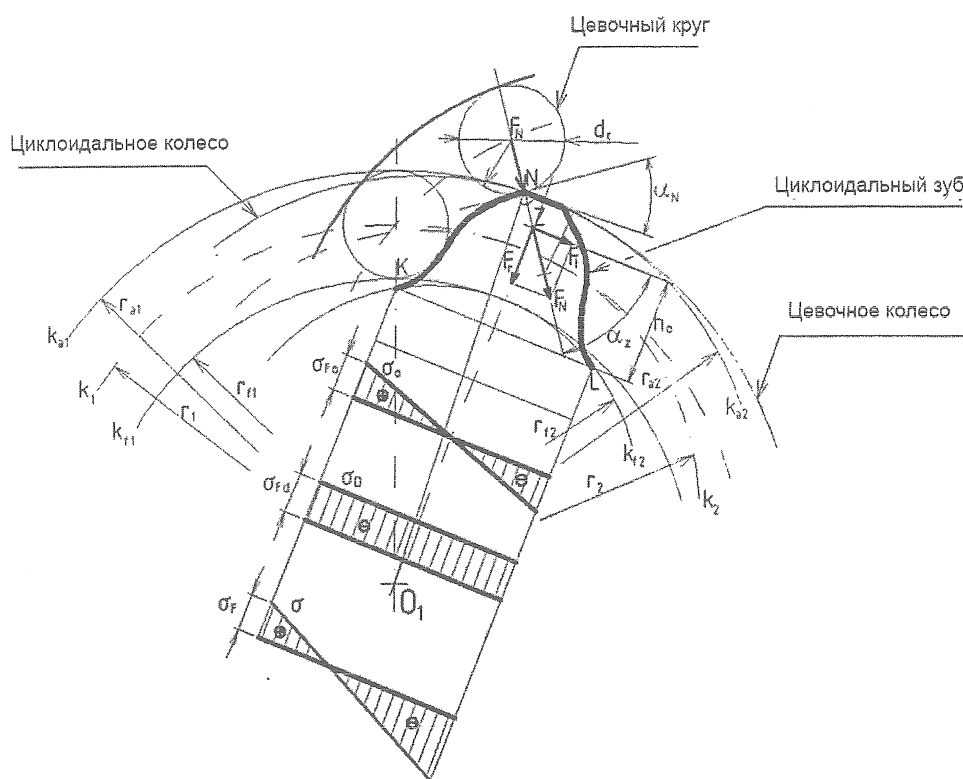
**Проектный прочностной расчёт цевочно-циклоидального зацепления.** Прочностной расчёт С-Е-зацепления выполняется на основе анализа силовых соотношений, имеющих в [1]. Как и для эвольвентного зацепления, в этом случае необходимо выполнить проектный и проверочный расчёт зацепления соответственно на: а) усталость при изгибе; б) однократную нагрузку при изгибе; в) усталость в контакте (давление по Герцу); г) однократную нагрузку в контакте.

Для прочностного проверочного расчёта зацепления не пригодна ни одна из обязательных норм по STN, EN или ISO. При проверке зацепления по пунктам а—г можно проводить расчет на основе силового

нагружения или использовать в этих целях, например, метод конечных элементов (что не является предметом исследования в рамках данной работы). Расчёт необходимо выполнять на основе анализа статического и динамического нагружения передачи (определить показатели динамического нагружения) и на основе известных положений упругости и прочности. Перед выполнением прочностного расчёта рекомендуется, прежде всего, выполнить размерный расчёт передачи на основе известных данных и параметров. Следующим шагом должен быть проверочный расчёт с определением допускаемых напряжений и степени безопасности (по пунктам а—г) с возможной коррекцией начального проектного расчёта.

**Прочностной расчёт на усталость при изгибе.** Наибольшие изгибные напряжения зубьев циклоидного колеса проявляются в тот момент, когда имеется силовой контакт между цевкой (цилиндром) цевочного колеса на максимальном радиусе ( $r_{a2}$ ) их сопряжения, следовательно, на окружности вершин. При этом на зубья действует нормальная сила в направлении нормали к соприкасающимся поверхностям (рисунок 1).

Зуб рассматривается как защемлённая консоль, опасное сечение которой указано шириной  $s_v$  либо же расстоянием точек  $KL$ ,



Параметры цевочного колеса:  $r_{a1}$  — радиус окружности головок;  $r_1$  — радиус делительной окружности;  $r_{f1}$  — радиус окружности ножек;  $k_{a1}$  — окружность головок;  $k_1$  — делительная окружность;  $k_{f1}$  — окружность ножек;  $d_c$  — диаметр цевки (валика).

Параметры циклоидного колеса:  $r_{a2}$  — радиус окружности головок;  $r_2$  — радиус делительной окружности;  $r_{f2}$  — радиус окружности ножек;  $k_{a2}$  — окружность головок;  $k_2$  — делительная окружность;  $k_{f2}$  — окружность ножек;  $\sigma_o$  — эпюра напряжения при изгибе;  $\sigma_f$  — максимальное напряжение при изгибе;  $\sigma_D$  — эпюра напряжения сжатия;  $\sigma_{fd}$  — максимальное напряжение сжатия;  $\sigma$  — эпюра суммарного напряжения;  $\sigma_f$  — максимальная величина суммарного напряжения при изгибе;  $O_2$  — центр вращения циклоидного колеса

Рисунок 1 — Силовое нагружение зуба циклоидного колеса при изгибе

которые являются точками контакта прямых, направленных с точки  $z$  на ось зуба к переходным кривым (круговым изгибам) в ножке зуба. Вторым размером сечения является ширина зубчатого колеса  $b_v$ . Сечение зуба  $s_v \times b_v$  работает на изгиб от тангенциальной силы  $F_t$ . Силы  $F_t$  и  $F_r$  являются составляющими нормальной силы  $F_N$ , действующей на зуб в крайней точке касания, которая находится на окружности вершин радиусом  $r_{a1}$ . Разложение сил осуществляется в точке  $M$ , которая является пересечением линии действия силы  $F_N$  и оси зуба циклоидного

колеса. Эпюры напряжений при изгибе  $\sigma_{Fo}$  и контактного напряжения  $\sigma_{Fd}$  на ширине зуба  $s_v$  показаны на рисунке 1.

Составляющие сил  $F_t$  и  $F_r$  в точке  $z$  определяем следующим образом:

$$F_t = F_N \cos \alpha_z;$$

$$F_r = F_N \sin \alpha_z.$$

Если далее введём коэффициент  $K_F$ , выражающий влияние динамического нагружения, которое зависит от эксплуатационных условий и точности изготовления передачи, а также от величины максимальных сил  $F_N$ ,  $F_t$  и  $F_r$ , то сможем записать следующие выражения:

$$F_{N \max} = F_N K_F;$$

$$F_{t \max} = F_t K_F;$$

$$F_{r \max} = F_r K_F.$$

При определении коэффициента  $K_F$  можно поступать аналогично в соответствии с нормой STN 01 4686 (Прочностной расчёт цилиндрических и конических зубчатых колёс) [2]. Из эпюр напряжений (см. рисунок 1) видно, что абсолютно наибольшим напряжением является контактное напряжение в точке  $L$ . С точки зрения усталости материала наиболее опасным является суммарное временное напряжение растяжения  $\sigma_F$  в точке  $K$ , что можно видеть из выражений

$$\sigma_F = \frac{M_{o \max}}{W_o} - \frac{F_{r \max}}{S_z},$$

$$\text{или } \sigma_F = \sigma_{Fo} - \sigma_{Fd},$$

после подстановки получающих следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_F &= \frac{K_F F_t h_o}{\frac{1}{6} b_v s_v^2} - \frac{K_F F_r}{b_v s_v} = \\ &= \frac{K_F F_N \cos \alpha_z h_o}{\frac{1}{6} b_v s_v^2} - \frac{K_F F_N \sin \alpha_z}{b_v s_v}. \quad (1) \end{aligned}$$

Если введём значения  $h_o$  и  $s_v$  как относительные величины с учётом модуля зацепления, т. е.  $h_o = h_o^* m$ ;  $s_v = s_v^* m$ , и представим силу

$F_N = \frac{F_t}{\cos \alpha_z}$ , то после подстановки в выражение (1) получим

$$\begin{aligned} \sigma_F &= \frac{K_F F_t h_o^*}{\frac{1}{6} b_v (s_v^*)^2 m} - \frac{K_F F_t \sin \alpha_z}{b_v s_v^* m \cos \alpha_z} = \\ &= \frac{K_F F_t}{b_v m} \left( \frac{6 h_o^*}{(s_v^*)^2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha_z}{s_v^*} \right). \end{aligned}$$

Выражение в скобках обозначим коэффициентом  $Y_c$ , определяющим форму зуба:

$$Y_c = \left( \frac{6 h_o^*}{(s_v^*)^2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha_z}{s_v^*} \right),$$

где  $s_v^*$  — коэффициент ширины зуба;

$h_o^*$  — коэффициент величины плеча.

Далее при максимальной величине переменного напряжения  $\sigma_F$  можем записать следующим образом:

$$\sigma_F = \frac{K_F F_t Y_c}{b_v m}.$$

Проверку зацепления можно выполнить по соотношению

$$\sigma_F = \frac{K_F F_t Y_c}{b_v m} \leq \sigma_{FD}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{FD}$  — допустимое напряжение на усталость при изгибе, Па.

При определении допустимого напряжения при изгибе  $\sigma_{Fo}$  исходят из предела усталости  $\sigma_{F \lim}$  соответствующего материала

при изгибе. В этом случае для расчёта  $\sigma_{FD}$  учитывают пределы усталости для материалов зубчатых колёс [2]. На основе этого для  $\sigma_{FD}$  можем записать формулу

$$\sigma_{FD} = \frac{\sigma_{F\lim}}{S_{F\lim}},$$

где  $\sigma_{F\lim}$  — предел усталости при изгибе материала циклоидного колеса при заданном числе нагружаемых циклов [2];

$S_{F\lim}$  — наименьшая величина коэффициента безопасности против возникновения усталостной поломки в ножке зуба. Величина коэффициента  $S_{F\lim}$  зависит от конкретного вида и характера нагрузки в эксплуатации. Чем точнее выполнен анализ динамического нагружения  $K_F$ , тем ниже может быть величина  $S_{F\lim}$ , что ведёт к снижению массы всего передаточного механизма. Коэффициент  $S_{F\lim}$  при подробном анализе характера и влияния нагружения можно выбрать в пределах  $S_{F\lim} = 1,2...1,4$ . При упрощённом расчёте  $S_{F\lim} \approx 1,4...1,7$ .

Если допустить, что тангенциальная сила  $F_t$  действует в контакте делительных окружностей  $d_1$  и  $d_2$  цевочного и циклоидного колеса, тогда

$$F_t \approx F_{t1} \approx F_{t2}. \quad (3)$$

Далее силу, действующую на один зуб циклоидного колеса, можем выразить через крутящий момент  $M_{k2}$ , действующий на циклоидном колесе 2 по формуле

$$F_{t2} = \frac{2M_{k2}}{d_2 n_c} = \frac{2M_{k2}}{m z_2 n_c},$$

где  $n_c$  — число одновременно зацепляющихся зубьев циклоидного колеса 2;  
 $z_2$  — число зубьев циклоидного колеса 2.  
 Отношение (2) можно выразить в виде

$$\sigma_F = \frac{2K_F M_{k2} Y_c}{b_v m^2 z_2} \leq \sigma_{FD}.$$

Далее при расчёте зацепления можно исходить из выражения для расчёта величины модуля

$$m \geq \sqrt{\frac{2K_F M_{k2} Y_c}{b_v z_2 \sigma_{FD}}},$$

где модуль  $m$  можно выразить как функцию диаметра цевки, т. е. диаметра цевочного колеса  $d_c$ , зацепляющегося с зубом циклоидного колеса, по формуле

$$m = \frac{d_c}{n_z},$$

либо же диаметра цевки, цилиндра цевочного колеса, обозначенного далее как  $d_c = m n_z$  [1]. Величину коэффициента формы зуба  $Y_c$  при расчёте модуля в зависимости от геометрии циклоидного зацепления предварительно можно выбирать в пределах  $Y_c = 2...3$ . Эту величину можно проверить при прочностном расчёте зацепления по размерному расчёту передачи.

**Одноразовая нагрузка на изгиб.**  
 Кроме проверки на усталость при изгибе зуба, необходимо проверить напряжение при изгибе при однократном наибольшем нагружении в процессе эксплуатации по формуле

$$\sigma_{F \max} = \sigma_F K_{MF} \leq \sigma_{FP \max},$$

где  $\sigma_{F \max}$  — максимальное напряжение при однократном нагружении в течение всего времени эксплуатации, Па;

$\sigma_F$  — напряжение при изгибе по уравнению (2);

$K_{MF}$  — коэффициент однократного нагружения, определяющий, во сколько раз максимальная однократная сила  $F_{j \max}$  больше, чем сила  $F_{N \max}$ , исходя из выражения (3).

Тогда

$$F_{j \max} = K_M F_{N \max},$$

где  $K_M$  — величина, определяемая из анализа нагружения по результатам измерений;

$\sigma_{FP \max}$  — допустимое напряжение при изгибе при наибольшей нагрузке, Па, [2], отсюда  $\sigma_{FP \max} = (1,3 \dots 2) \sigma_{F \lim}$ .

**Прочностной расчёт на контактную усталость.** Основной расчёт цевочно-циклоидального зацепления на контактную прочность определён контактным напряжением по Герцу в точках зацепления — касания цевки, цилиндра цевочного колеса и зуба циклоидного колеса соответственно. Величина напряжения по Герцу,  $\sigma_H$ , в контакте будет

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{K_H F_N \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)}{\pi \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}}$$

где  $K_H$  — коэффициент динамического нагружения в контакте, для определения которого можно использовать приём, показанный в [2];

$F_N$  — нормальная сила в точке  $N$  контакта, Н;

$b_v$  — ширина зацепления, м;

$\rho_1$  — радиус кривизны цевки цилиндра, м;

$\rho_2$  — радиус кривизны зуба циклоидного колеса в точке  $N$  зацепления;

$\mu_1, \mu_2$  — постоянные Пуассона для материалов цевочного и циклоидного колёс;

$E_1, E_2$  — модули упругости материалов колёс.

Давление по Герцу (напряжение) проверяем главным образом в местах наибольшего нагружения от нормальной силы  $F_N$  между зацепляющимися зубьями и в месте наименьшего приведённого радиуса кривизны по Герцу.

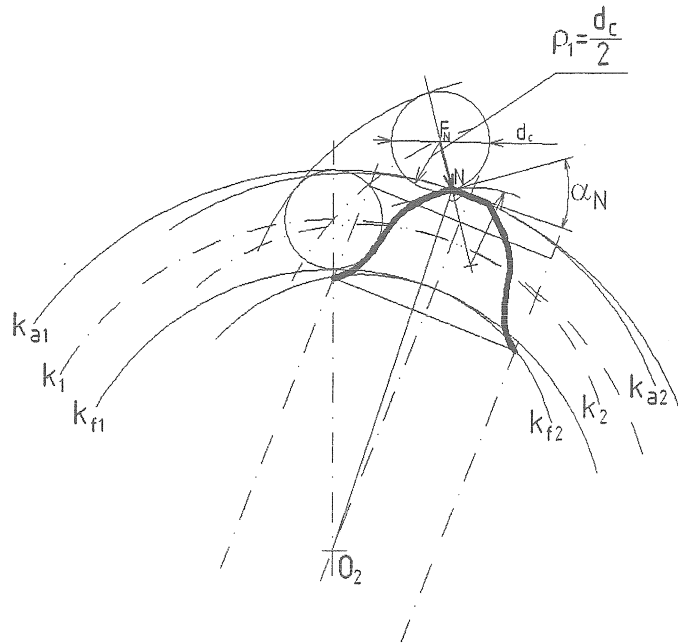
Максимальная нормальная сила (давление) между зубьями наблюдается, как и при расчёте на изгиб, в последней точке зацепления на окружности вершин (головок)  $k_{a1}$  цевочного колеса (рисунок 2). В этой точке  $N$  одновременно наименьший приведённый радиус кривизны  $\rho_H$  по Герцу определяется по формуле

$$\rho_H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1 \rho_2},$$

где  $\rho_1$  — радиус кривизны цевки (цилиндра), который равен

$$\rho_1 = \frac{d_c}{2} = m.$$

Для определения величины напряжения  $\sigma_H$  необходимо определить величину радиуса кривизны  $\rho_2$  зуба циклоидного колеса в точке зацепления. Величину радиуса кривизны можно вычислить математически из геометрии зацепления. Как следует из [1],



$d_c$  — диаметр цевки (валика);  $\rho_1$  — радиус кривизны цевки

Рисунок 2 — Схема нагружения циклоидного зуба при контакте

профиль кривизны боковой поверхности зуба представлен двумя параметрическими уравнениями:

$$x_e = x + r_e \sin \alpha,$$

$$y_e = y - r_e \cos \alpha.$$

Если профиль кривизны зуба задан параметрически, из геометрии зацепления известно, что радиус кривизны  $\rho_2$  в данной точке зацепления  $N$  можно выразить отношением

$$\rho_{2N} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|y''x' - y'x''|},$$

где  $x', x'', y', y''$  — первый и второй дифференциалы параметрических уравнений [1] в точке.

Для расчёта радиуса кривизны  $\rho_2$  (в связи со сравнительной сложностью выражений после дифференцирования уравнений) удобно использовать расчётную технику с подходящим софтвером. При расчёте и контроле  $\sigma_H$  на делительных окружностях и в области ножки зуба поступаем аналогично. Проверку зацепления по контакту в точке  $N$  далее выполняем по отношению

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{K_H F_N \left( \frac{2}{d_c} + \frac{1}{\rho_{2N}} \right)}{b_v \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}} \leq \sigma_{HD}.$$

Выражение в знаменателе под корнем характеризует механические свойства использованных материалов передачи. Если назовём  $z_M$  коэффициентом материала, который равен

$$z_M = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}}$$

то далее

$$\sigma_H = z_M \sqrt{\frac{K_H F_N}{b_v} \left( \frac{2}{d_c} + \frac{1}{\rho_{2N}} \right)} \leq \sigma_{HD}. \quad (4)$$

Выражение  $\frac{2}{d_c}$  в приведённом выше соотношении (4) можем заменить выражением  $\frac{1}{m}$ , откуда имеем

$$\sigma_H = z_M \sqrt{\frac{K_H F_N}{b_v} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{\rho_{2N}} \right)} \leq \sigma_{HD}. \quad (5)$$

Допускаемое напряжение в контакте  $\sigma_{HD}$  рассчитаем по пределу усталости материала в контакте, делённому на коэффициент безопасности в контакте для выбранного материала передачи:

$$\sigma_{HD} = \frac{\sigma_{H \lim}}{S_{H \lim}},$$

где  $\sigma_{HD}$  — допускаемое напряжение на усталость в контакте;

$\sigma_{H \lim}$  — предел усталости выбранного материала в контакте при заданном числе нагружаемых циклов [2];

$S_{H \lim}$  — коэффициент степени безопасности в контакте. При подробном анализе динамического характера эксплуатации и остальных влияний можно выбрать  $S_{H \lim} = 1,1 \dots 1,2$ .

**Однократное нагружение в контакте.** Проверка по однократному нагружению в контакте наибольшей силой в процессе эксплуатации производится по формуле

$$\sigma_{H \max} = \sigma_H \sqrt{K_M} \leq \sigma_{HP \max},$$

где  $\sigma_{H \max}$  — максимальное напряжение в контакте от максимального однократного нагружения в процессе эксплуатации;

$\sigma_H$  — напряжение в контакте по выражению (5);

$K_M$  — коэффициент однократного максимального нагружения, определённый аналогично одноразовому нагружению на изгиб;

$\sigma_{HP \max}$  — максимальное допустимое напряжение от однократного нагружения, Па.

Согласно STN 01 4686 [2],  $\sigma_{HP \max}$  зависит от материала и термообработки. Для колеса с термообработкой (нормализованный отжиг), улучшением и с закалёнными и отпущенными зубьями величина будет выражена формулой

$$\sigma_{HP \max} = 2,8 \operatorname{Re}(R_{p02}),$$

где  $\operatorname{Re}$ ,  $R_{p02}$  — предел скольжения материала; для цементованных зубьев с поверхностной закалкой — формулой

$$\sigma_{HP \max} = 4V_{HV},$$

для азотированных — выражением

$$\sigma_{HP \max} = 3V_{HV},$$

где  $V_{HV}$  — твёрдость боковых поверхностей зубьев по Виккерсу.

проверен экспериментальными методами в дальнейшей научно-исследовательской работе на кафедре проектирования технологических устройств. Полагаем, что исследование станет положительным вкладом в решение вопроса по изготовлению специальных передач на базе циклоидального зацепления с возможностью их использования в приводах производственной техники.

#### Список цитируемых источников

1. *Demeč, P.* Výrobná technika / P. Demeč. — Košice : Sjf TU Košice, Edícia študijnej literatúry. — 2005. — 250 s.
2. *Grega, R.* Prezentácia vlastností pneumatických spojok novej typovej rady / R. Grega, J. Krajňák, M. Jurčo // Acta Mechanica Slovaca. — 2004. — Roč. 8. — Č. 3 : Optimalizácia mechanických sústav. — S. 47—52.

4. Investigation of Gaseous Medium State Change in Pneumatic Element of Flexible Shaft Coupling / F. Kardoš [et al.] // Pneumatyka. — 2007. — № 1, vol. 62. — P. 34—36.

5. *Klím, V.* Some Problems on Micromechanism's Actuators / V. Klím, M. Mantič // Acta Mechanica Slovaca. — 2004. — Roč. 8. — Č. 1. — S. 69—74

6. Teória a stavba lesných strojov / M. Mikleš [et al.]. — TU vo Zvolene, 1993. — S. 274.

7. *Vagaská, A.* Predikčný model hrúbky povlaku pri galvanickom zinkovaní / A. Vagaská, M. Gombár. — Strojárstvo extra. — 2010. — Č. 5. — S. 38/1—38/3.

8. *Vojtko, I.* Meranie a zhodnocovanie vibrácií / I. Vojtko, R. Matija // Nové smery vo výrobných technológiách — 2006 : VIII Medzinár. vedecká konf., Prešov, 22-23.06.2006 : zb. referátov. — Košice : FVT TU, 2006. — S. 503—508.

9. STN 014 686 a ďalšie súvisiace normy STN, EN, ISO.

Материал поступил в редакцию 28.02.2013 г.

This paper describes the design strength calculations of the cycloidal gear on fatigue in bend and in contact. It also provides the calculation of single-shot load in bending and single-shot load in contact.