УДК 539.2

С. І. Русан
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь,
вул. Войкава, 21, 225404 Баранавічы, Рэспубліка Беларусь, +375 (163) 64 06 63, rusan33@mail.ru

НЕТРАДЫЦЫЙНЫ МЕТАД СІЛАВОГА АНАЛІЗУ СТАТЫЧНА НЕАЗНАЧАЛЬНЫХ СІСТЭМ З ЖОРСТКІМ АБ’ЕКТАМ

Объектом исследования является статически неопределимая механическая система, состоящая из одного твердого тела на жесткой опоре и совокупности упругих связей. На нее действует неуравновешенная плоская система внешних сил. Цель исследования — усовершенствование методики определения внутренних сил в связях. Типовая методика исследования, изучаемая в курсе сопротивления материалов, приводит к решению системы алгебраических уравнений. Чтобы упростить методику, здесь вводятся понятия внутренней нагруженности связи и внешней нагруженности механической системы, сформулирована и доказана теорема о равенстве нагруженностей. Теорема позволила построить алгоритм силового анализа без составления и решения системы уравнений. Алгоритм проиллюстрирован численным примером анализа. Полученные результаты могут использоваться как в учебном процессе, так и в инженерных расчетах.

Ключевые слова: статически неопределимая система; внутренняя сила; деформация стержня; уравнение равновесия.

Рис. 5. Библиогр.: 2 назв.

S. I. Rusan
Baranovichi State University, Ministry of Education of the Republic of Belarus, 21 Voykova Str., 225404 Baranovichi, Republic of Belarus, +375 (163) 64 06 63, rusan33@mail.ru

UNCONVENTIONAL METHOD OF POWER ANALYSIS OF STATICALLY INDETERMINATED SYSTEMS WITH A HARD OBJECT

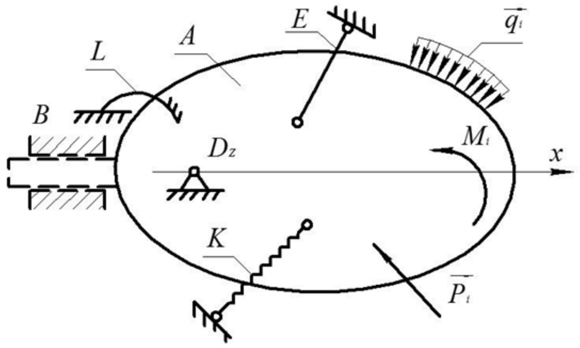
The object of the research is a statically indeterminated mechanical system which consists of one rigid body on a rigid support and a set of elastic links. The goal of the study is the improvement of the methodology of determination of the internal forces in the links. The standard method of solving the problem leads to the solution of the system of algebraic equations. To simplify the task we have formulated and proved the theorem that expresses the ratio of impacts and stiffness. It made possible to construct an algorithm of power analysis without making and solving the system of equations. There is a numerical example of the analysis. The obtained results can be used both in the educational process and engineering calculations.

Key words: statically indeteminated system; internal forces; deformation of the rod; equation of equilibrium.

Fig. 5. Ref.: 2 titles.

Уводзіны. ***Агульныя заўвагі. Змест задачы.*** Пытанні трываласці механічных сістэм у эпоху інтэнсіўнага развіцця тэхнікі застаюцца прыярытэтнымі. Удасканальваюцца як аб’екты тэхнікі, так і метады іх разлікаў на трываласць. Узнікае неабходнасць карэкціроўкі адпаведных дысцыплін, вывучаемых у тэхнічных установах вышэйшай адукацыі.

Мадэль механічнай сістэмы ў нашым даследаванні складаецца з абсалютна цвёрдага цела і пругкіх элементаў і таму адносіцца да тыпу канструкцый, вывучаемых у курсах механікі матэрыялаў і тэарэтычнай механікі [1; 2]. Жорсткім аб’ектам A (рысунак 1) мадэліруецца плоскае цела адвольнай формы, дэфармацыямі якога можна ігнараваць у параўнанні з дэфармацыямі іншых частак механічнай сістэмы — стрыжняў E і спружын K, L. На аб’ект A накладваюцца двухвалентныя жорсткія сувязі B ці D. Кожная з іх дапускае



Рысунак 1. — Мадэль зададзенай механічнай сістэмы тыпаў *B* і *D*

для аб'екта адну ступень свабоды: пры налажэнні слізгальнай замацоўкі *B* ён можа перамяшчацца толькі пступальна ўздоўж восі *Bx*, а нерухомы шарнір *D* дапускае толькі паварот вакол восі *Dz*, перпендыкулярнай да плоскасці рысунка. Па віду жорсткіх сувязей прысвоім і назвы механічным сістэмам: сістэма тіпу *B* і сістэма тыпу *D*. Раўнавага рухомага аб'екта *A* пад дзеяннем знешніх сіл P_i, M_i, q_i магчыма, дзякуючы ўключэнню ў работу пругкіх сувязей *E*, *K*, *L*. Ступень статычнай неазначальнасці сістэмы ўстанаўліваецца паводле формулы $z = s - 1$, дзе s — агульная колькасць пругкіх сувязей.

Сувязі-стрыжні *E* зазнаюць восевую дэфармацыю паводле закона Гука. Дэфармацыя цыліндрычнай спружыны *K* прапарцыянальна рэактыўнай сіле N_{K_i}, а спружыны тыпу *L* — рэактыўнаму моманту M_{L_i} (апошняя рэагуе толькі на паварот аб'екта *A*). Такім чынам, абсалютныя дэфармацыі Δl_{E_i}, Δl_{K_i}, $\Delta\varphi_{L_i}$ сувязей тыпу *E*, *K*, *L* суадносяцца з іх рэакцыямі N_{E_i}, N_{K_i}, M_{L_i} паводле формул

$$\Delta l_{E_i} = N_{E_i} l_i / E_i F_i; \quad \Delta l_{K_i} = N_{K_i} c_{K_i}; \quad \Delta\varphi_{L_i} = M_{L_i} c_{\varphi_i}. \tag{1}$$

Тут ніжнім індэксам i абазначаны нумары сувязей; індэксамі *K*, *L* пазначаны велічыні, што належаць да адпаведных тыпаў спружын. Даўжыні недэфармаваных стрыжняў роўны l_i, E_i, F_i — модуль Юнга і плошча сячэння стрыжня; c_{K_i}, c_{φ_i} — жорсткасці цыліндрычнай і спіральнай спружын. Сувязі тыпу *L* жорстка змацаваны з аб'ектам *A* і з нерухомай асновай, што знаходзіцца за межамі аб'екта. Астатнія сувязі далучаюцца да цела *A* і жорсткай асновы шарнірна і зазнаюць дэфармацыі расцяжэння-сціскання. Нагрузка на аб'ект P_i, M_i, q_i уяўляе неўраўнаважаную плоскую сістэму сіл.

Мэта даследавання апісанай механічнай сістэмы — вызначэнне ўнутраных сіл (рэакцый) у элементах тыпу *E*, *K*, *L* пры іх вядомых механічных, геаметрычных характарыстыках і зададзеным знешнім сілавым уздзеянні на цела *A*.

Асноўная частка. ***Характарыстыка жорсткасцей.*** Жорсткасць пругкага элемента механічнай сістэмы залежыць ад матэрыялу, з якога ён выраблены, ад яго геаметрычных параметраў і размяшчэння ў механічнай сістэме. Таму адзін і той жа пругкі элемент мае некалькі відаў характарыстык жорсткасці (табліца 1). Так, для апісання супраціўлення сувязі тыпу *E* (стрыжань) выкарыстоўваюцца жорсткасці c_{E_i}, c'_{E_i}, c''_{E_i}. Першая з іх $c_{E_i} = E_i F_i$ уяўляе жорсткасць сячэння; другая $c'_{E_i} = E_i F_i / l_i$ характарызуе супраціўленне ўсяго стрыжня; назавём яе адноснай. Жорсткасць c''_{E_i} улічвае размяшчэнне стрыжня ў механічнай сістэме; яе будзем называць прыведзенай жорсткасцю. Як відаць з табліцы 1, прыведзеная жорсткасць

Т а б л і ц а 1. — Жорсткасці сувязей

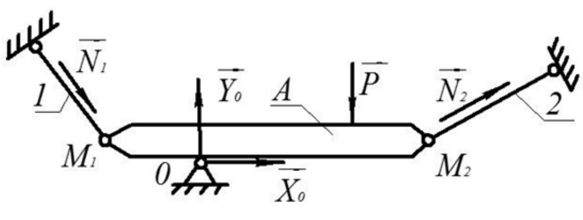
Магчымае перамяшчэнне аб’екта *A*	Тып пругкага элемента	Віды жорсткасцей элементаў		
		c_i	c'_i	c''_i
пастувальнае	*E*	E_iF_i	E_iF_i / l_i	$c'_i \cos\alpha_i$
	K	—	c_{K_i}	$c_{K_i} \cos\beta_i$
	L	—	—	—
вярчальнае	*E*	E_iF_i	E_iF_i / l_i	$c'_{E_i} h_i$
	K	—	c_{K_i}	$c_{K_i} h_i$
	L	—	c_{φ_i}	c_{φ_i}

стрыжня залежыць як ад яго становішча ў механічнай сістэме, так і ад характару магчымага перамяшчэння цела *A*: пры паступальным перамяшчэнні жорсткасць c''_{E_i} прыводзіцца да восі *Bx*, а пры вярчальным — да цэнтра *D* (*гл.* рысунак 1). Жорсткасць усёй сістэмы сувязей будзем абазначаць літарай *c* з індэксам: пры паступальным перамяшчэнні — c_x, пры вярчальным — c_φ. Велічыні c_x, c_φ вызначаюцца па формулах

$$c_x = \sum_{i=1}^{n} c'_{E_i} \cos^2\alpha_i + \sum_{i=1}^{m} c'_{K_i} \cos^2\beta_i; \quad c_\varphi = \sum_{i=1}^{n} c'_{E_i} h_i^2 + \sum_{i=1}^{m} c_{K_i} h_i^2 + \sum_{i=1}^{p} c_{\varphi_i}. \qquad (2)$$

Літарамі *n*, *m*, *p* тут абазначана колькасць сувязей тыпу *E*, *K*, *L*, а вугламі α_i, β_i задаецца нахіл стрыжняў і восей цыліндрычных спружын.

Тыпавая методыка рашэння задач з жорсткім аб’ектам. Як адзначалася вышэй, механічныя сістэмы з жорсткім аб’ектам разглядаюцца ў курсе «Механіка матэрыялаў» [1, с. 56—58]. У вучэбных заданнях жорсткі аб’ект уяўляе сабою стрыжань на адной нерухомай шарнірнай апоры (рысунак 2). Да яго прыкладзена знешняя сіла *P*. Дадаткова аб’ект замацаваны з дапамогай дзвюх пругкіх сувязей 1, 2 тыпу *E*. Невядомымі з’яўляюцца восевыя сілы N_1, N_2 і рэакцыі X_0, Y_0. Для іх вызначэння можна скласці толькі тры статычныя ўмовы раўнавагі. Значыць, даследуемая механічная сістэма адзін раз статычна неазначальная. На першым этапе рашэння задачы асобна знаходзяцца сілы N_1, N_2, а затым, пры неабходнасці, вызначаюць рэакцыі X_0, Y_0. Каб знайсці дзве сілы N_1, N_2, патрэбна скласці два ўраўненні. Адным з іх прымаецца ўраўненне статыкі, якое не ўтрымлівае невядомых X_0, Y_0. Для атрымання другога ўраўнення разглядаюцца перамяшчэнні пунктаў M_1, M_2, у якіх стрыжні прымацаваны да аб’екта *A*, і адпаведныя ім дэфармацыі стрыжняў



Рысунак 2. — Тыпавая мадэль механічнай сістэмы

Δl_1, Δl_2 паводле закона Гука, запісаныя вышэй у радку (1). Такім чынам, тыповая методыка даследавання статычна неазначальнай сістэмы заснавана на трох тыпах залежнасцей: статычнай, геаметрычнай і фізічнай. На завяршальнай стадыі даследавання рашаецца атрыманая сістэма алгебраічных ўраўненняў адносна невядомых восевых сіл N_1, N_2. Парадак гэтай сістэмы роўны двум, г. зн. колькасці стрыжняў. Пры іх павелічэнні рашэнне задачы істотна ўскладняецца, што з'яўляецца недахопам тыповай методыкі. Ніжэй прапануецца іншы варыянт заключнага сінтэзу атрыманых залежнасцей, які дазваляе пазбегнуць адзначаных цяжкасцей.

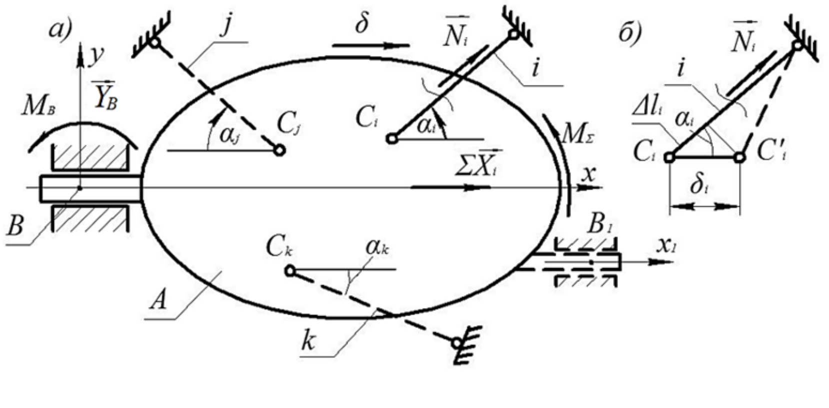
Унутраная і знешняя нагружанасці. Тэарэма аб роўнасці нагружанасцей. Унутраныя сілы (рэакцыі) у элементах з індэксамі *i* тыпаў *E*, *K* абазначым літарамі N_{E_i}, N_{K_i}, а ўнутраны момант у элеменце тыпу *L* — праз M_{L_i}. Адносіны ўнутраных сіл і момантаў да іх прыведзеных жорсткасцей c_i'' будзем называць унутранымі нагружанасцямі элементаў і абазначаць літарамі n_{E_i}, n_{K_i}, m_{L_i}, г. зн. $n_{E_i} = N_{E_i} \big/ c''_{E_i}$, $n_{K_i} = N_{K_i} \big/ c''_{K_i}$, $m_{L_i} = M_{L_i} / c_{\varphi_i}$.

У выпадках, калі не патрэбна ўдакладненне тыпу элемента, яго ўнутраную нагружанасць будзем выражаць формулай $n_i = N_i / c_i''$. Значэнні c_i'' для кожнага тыпу сувязі прыведзены ў табліцы 1. Чым большая нагружанасць элемента, тым вышэй яго напружана-дэфармаваны стан. Знешнюю нагрузку на механічную сістэму абазначым праз $P_{\sum}$. Яе праекцыі на восі каардынат і моманты адносна цэнтраў *B*, *D* будзем абазначаць сімваламі $\sum X_i, \sum Y_i$, M_B, M_D. Адносіны знешняй нагрузкі $P_{\sum}$ на сістэму да яе жорсткасці *c* назавём знешняй нагружанасцю механічнай сістэмы і абазначым малой літарай $p_{\sum}$. Значыць, паводле азначэння, $p_{\sum} = P_{\sum} / c$. Канкрэтызуем гэту формулу для механічных сістэм тыпаў *B* і *D*: $p_{\sum B} = \sum X_i / c_x$, $p_{\sum D} = M_D / c_{\varphi}$. Жорсткасці c_x, c_{φ} вызначаюцца па формулах (2).

Тэарэма. *У плоскіх механічных сістэмах з жорсткім аднарухомым аб'ектам унутраная нагружанасць дэфармаванага элемента роўнна знешняй нагружанасці механічнай сістэмы:* $n_i = p_{\sum}$.

Доказ тэарэмы выканаем асобна для механічных сістэм тыпаў *B* і *D*. Каб скараціць выкладанне, на рысунках 3 і 4 захаваем толькі сувязі тыпу *E*.

Доказ тэарэмы для сістэмы тыпу B. Колькасць стрыжняў роўна *n*. На рысунку 3 паказаны адзін з іх у трох магчымых становішчах з індэксам *i (j, k)* даўжынёю l_i (l_j, l_k). Арыентацыю стрыжня ў сістэме будзем задаваць вуглом α_i, які ён утварае з воссю B_x. Мяркуецца,



Рысунак 3. — Разліковая мадэль тыпу *B*

што $0° \le \alpha_i \le 90°$. Сума праекцый усіх знешніх сіл на вось B_x паказана на рысунку 3 адрэзкам $\sum X_i$, а іх момант адносна цэнтра *B* абазначаны літарай $M_{\sum}$. Рэактыўныя сілы жорсткай сувязі *B* роўныя Y_B, M_B. Перамяшчэнне жорсткага цела *A* паказана стрэлкай δ. Заўважым, што паколькі аб'ект *A* выконвае паступальнае перамяшчэнне, то ў формулах (2) нагружанасці n_{E_i}, якія ўяўляюць перамяшчэнні шарніраў C_i, C_j, C_k, роўныя паміж сабою: $n_{E_i} = \delta_i = \delta_j = \delta_k = \delta$. На рысунку 3, *б*, асобна паказаны стрыжань *i*: суцэльнай лініяй да нагружэння сістэмы і пункцірнай — пасля перамяшчэння шарніра C_i разам з целам *A* на адлегласць $\delta_i = C_i C_i'$. Абсалютная дэфармацыя стрыжня (*гл.* рысунак 3, *б*) роўна $\Delta l_i = \delta_i \cos\alpha_i$. Адпаведную ёй унутраную сілу абазначаем літарай N_i і накіроўваем ад сячэння. Далей выкарыстоўваем апісаныя вышэй тры віды залежнасцей паводле тыповага метаду аналізу:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{k} X_i = 0; \quad \Delta l_i = \delta_i \cos\alpha_i; \;\; \Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i}. \tag{3}$$

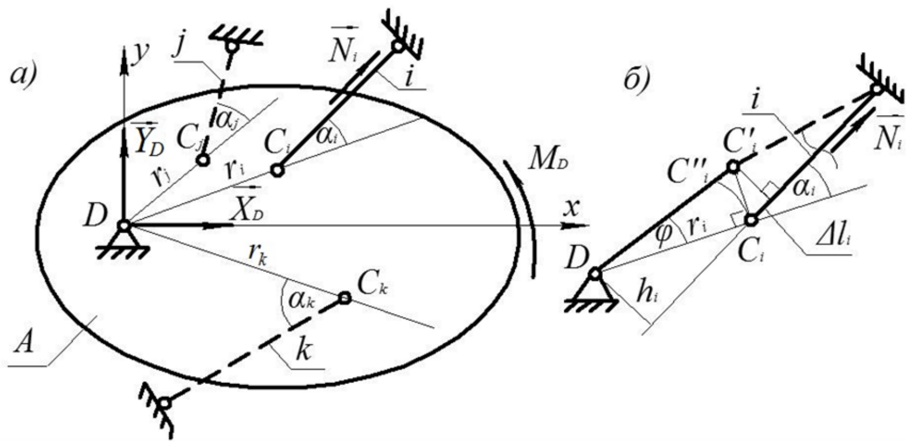
З двух апошніх роўнасцей (3) знаходзім: $\delta_i \cos\alpha_i = N_i l_i / E_i F_i$; адсюль

$$N_i / c_i' \cos\alpha_i = \delta = n_{E_i}. \tag{4}$$

Для механічнай сістэмы, што ўключае *n* сувязей і столькі ж невядомых сіл N_i, запісваем $(n-1)$ роўнасцей (4) і далучаем першае ўраўненне (3). Атрымліваем паводле тыповай методыкі *n* алгебраічных ураўненняў адносна невядомых сіл N_i. Самая працаёмкая частка даследавання — рашэнне атрыманай сістэмы ўраўненняў. Каб спрасціць рашэнне задачы, у якасці невядомых прымем замест N_i нагружанасць стрыжняў n_{E_i}. З роўнасці (4) знаходзім: $N_i = n_{E_i} c_i' \cos\alpha_i$. Тады першае ўраўненне (3) прымае выгляд $\sum_{i=1}^{n} n_{E_i} c_i' \cos^2\alpha_i + \sum_{i=1}^{k} X_i = 0$. Адсюль $n_{E_i} \sum_{i=1}^{n} c_i'' \cos\alpha_i = -\sum_{i=1}^{n} X_i$ і $n_{E_i} = -\sum_{i=1}^{k} X_i / \sum_{i=1}^{n} c_i'' \cos\alpha_i$. Канчаткова $n_{E_i} = p_{\sum B}$. Тэарэма даказана.

Доказ тэарэмы для сістэмы тыпу D. У гэтай сістэме аб'ект *A* пад знешнім уздзеяннем можа паварочвацца вакол шарніра *D* і нагружаць стрыжні (рысунак 4, *а*). Іх становішча ў сістэме вызначаецца вугламі α, якія цяпер адлічваюцца ад прамых, задаваемых адрэзкамі DC_i, DC_j, DC_k. Як і раней, мяркуецца, што $0° \le \alpha \le 90°$. На рысунку 4, *а*, паказана некалькі варыянтаў размяшчэння стрыжняў, злучаных з целам *A* ў пунктах C_i, C_j, C_k. Выкарыстоўваем метад сячэнняў; сілы N_i накіроўваем ад сячэнняў у бок знешняй замацоўкі. Прымаем абазначэнні: φ — вугал павароту аб'екта *A* пад дзеяннем моманта знешніх сіл M_D; δ_i — перамяшчэнне пункта C_i; мяркуецца, што вугал φ малы, таму дугу $C_i C_i''$ замяняем адрэзкам $C_i C_i' = \delta_i$ (*гл.* рысунак 4, *б*); h_i — плячо сілы N_i адносна цэнтра *D*. Запісваем статычную ўмову раўнавагі, геаметрычныя і фізічныя суадносіны паводле рысункаў 4, *а*, *б*:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i h_i + M_D = 0; \;\; \frac{\delta_i}{r_i} = \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{const}; \quad \Delta l_i = \delta_i \sin\alpha_i; \quad \Delta l_i = N_i l_i / E_i F_i.$$



Рысунак 4. — Разліковая мадэль тыпу *D*

З іх атрымліваем $\delta_i \sin\alpha_i = N_i l_i / E_i F_i$, $\mathrm{tg}\varphi \sin\alpha_i = N_i l_i / r_i E_i F_i$. У якасці невядомай велічыні прымаем пастаянную $\mathrm{tg}\varphi = N_i l_i / r_i E_i F_i \sin\alpha_i = N_i l_i / E_i F_i h_i$ ці

$$\mathrm{tg}\varphi = N_i / c'_i h_i = N_i / c''_i. \tag{5}$$

Тады $N_i = \mathrm{tg}\varphi \cdot c'_i$, а ўмова раўнавагі набывае выгляд: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tg}\varphi \cdot c''_i h_i + M_D = 0;$ $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{tg}\varphi \cdot c''_i h_i + M_D = 0;$ інакш $\mathrm{tg}\varphi \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i = -M_D$, дзе $\overline{c}_i = c''_i h_i$.

Адгэтуль атрымліваем знешнюю нагружанасць $p_{\sum D}$ сістэмы *D*:

$$\mathrm{tg}\varphi = -M_D / \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i = p_{\sum D}.$$

Але паводле (5) $\mathrm{tg}\varphi = N_i / c'_i h_i$, г. зн. уяўляе ўнутраную нагружанасць n_{E_i} стрыжня *i*. Такім чынам,

$$n_{E_i} = p_{\sum D}. \tag{6}$$

Методыка вызначэння нармальных сіл на падставе тэарэмы нагружанасцей. Разгледзім методыку сілавога аналізу тыпу *D* з пругкімі стрыжнямі. Для іх тэарэма выражаецца роўнасцю (6), з якой знаходзім:

$$N_i = c''_i p_{\sum D}. \tag{7}$$

Структурай формулы (7) вызначаецца наступная методыка вылічэння сіл N_i:

– знаходзім прыведзеныя да цэнтра *D* жорсткасці c''_i усіх стрыжняў;

– знаходзім параметры жорсткасці $\overline{c}_i$ і прыведзеную да цэнтра *D* жорсткасць усёй сістэмы c_φ;

– вызначаем уздзеянне знешніх сіл $P_{\sum D} = M_D$ і знешнюю нагружанасць сістэмы $p_{\sum D} = M_D / c_\varphi$;

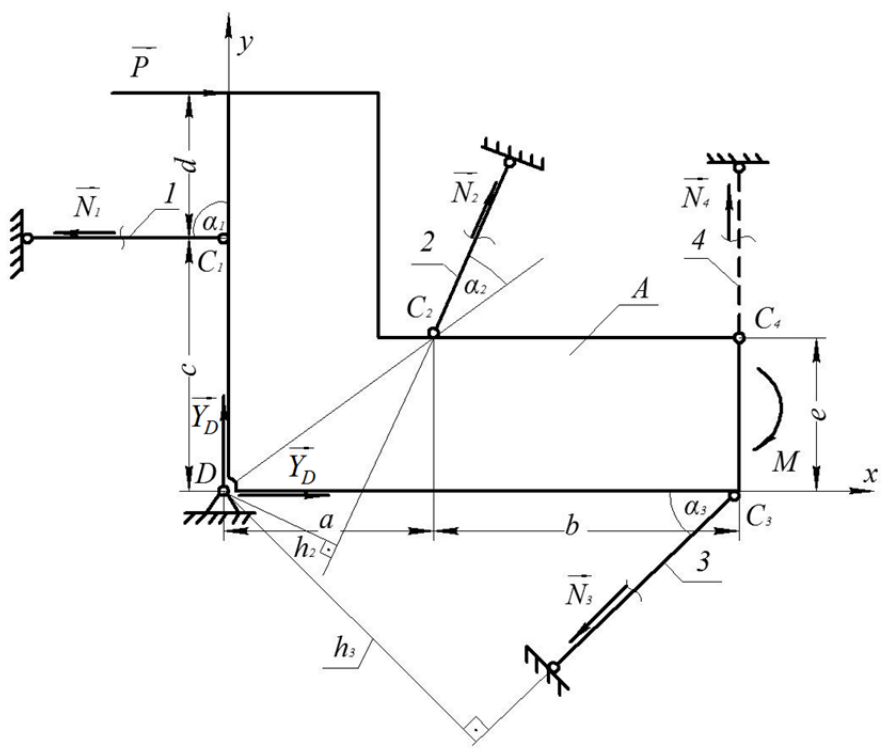
– па формуле (7) знаходзім нармальныя сілы N_i;

– устанаўліваем знакі сіл N_i.

Правілы ўстанаўлення знакаў для сістэм *B* і *D* аднолькавыя. Калі даўжыня стрыжня (спружыны) пры нагружэнні сістэмы павялічваецца, то яго дэфармацыя Δl_i і адпаведная ёй сіла N_i лічацца дадатнымі. І наадварот. Знакі дэфармацый устанаўліваем пасля вызначэння напрамкаў знешніх уздзеянняў $X_B = \sum X_{B_i}$, $M_D = \sum M_D\left(\vec{P}_i\right)$, якім адпавядаюць пэўныя напрамкі перамяшчэнняў δ_i шарніраў C_i (*гл.* рысункі 3, *б*, і 4, *б*). Калі праекцыі адрэзкаў δ_i на восі стрыжняў знаходзяцца ў межах стрыжняў, то іх дэфармацыі Δl_i і сілы N_i адмоўныя, а калі за межамі, то дадатныя. На рысунках 3, *б*; 4, *б,* яны адмоўныя, а стрыжні сціснутыя. А вось для стрыжня *j* на рысунку 3, *а*, і стрыжня *k* на рысунку 4, *а*, дэфармацыі і сілы дадатныя.

Прыклад. Механічная сістэма, утвораная з жорсткага цела *A*, замацаванага на апоры *D*, і пругкіх стрыжняў *1*, *2*, *3* знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы *P* і моманту *M* (рысунак 5). Вызначыць нармальныя сілы N_1, N_2, N_3 у стрыжнях. Дадзена: $E_1 = E_2 = E_3 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $F_1 = F_2 = 2$ см^2; $F_3 = 3$ см^2; $l_1 = 4$ м; $l_2 = 5$ м; $l_3 = 6$ м; $\alpha_1 = 90^\circ$; $\alpha_2 = 30^\circ$; $\alpha_3 = 45^\circ$; $a = 4$ м; $b = 6$ м; $c = 5$ м; $d = e = 3$ м; $P = 40$ кН; $M = 8$ кН · м.

Рашэнне. Аб'ект *A* (*гл.* рысунак 5) замацаваны з дапамогай апоры *D* і трох стрыжняў. Невядомымі сіламі з'яўляюцца X_D, Y_D, N_1, N_2, N_3. Для плоскай сістэмы сіл можна скласці тры статычныя ўмовы раўнавагі. Значыць, разгляданая механічная сістэма двойчы статычна неазначальная. Выкарыстаем апісаную вышэй методыку разліку. Для большай агляданасці алгарытм разлікаў рэалізуем у таблічнай форме (табліца 2).



Рысунак 5. — Разліковая мадэль для лікавага прыкладу

Т а б л і ц а 2. — Алгарытм вылічэння ўнутраных сіл

i	$c_i \cdot 10^{-7}$ (Н/м)	$c_i' \cdot 10^{-7}$ (Н/м)	h_i (м)	$c_i'' \cdot 10^{-7}$ (Н/м)	$\overline{c_i}$ 10^{-7} (Н/м)	N_i (кН)
	1	2	3	4	5	6
1	4	1	5	5	25	25 (11,1)
2	4	0,8	2,5	2	5	10 (4,44)
3	6	1	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	50	$-25\sqrt{2}$ (–15,7)
4	4	1	10	10	100	22,2

Па выніках графы 5 знаходзім прыведзеную да цэнтра D жорсткасць сістэмы $c_\varphi = \sum_{i=1}^{3} c_i = 80 \cdot 10^7$ Н · м.

Далей вызначаем $M_D = P\,(c + d) + M = 40 \cdot 8 + 80 = 400$ кН·м і знешнюю нагружанасць сістэмы $p_{\sum D} = M_D / c_\varphi =$ $5 \cdot 10^{-4}$. Па формуле (6) знаходзім сілы N_i і заносім іх у графу 6. Выконваем праверку канчатковага выніку. Паводле ўмовы раўнавагі аб’екта A $N_1h_1 + N_2h_2 + N_3h_3 = M_D$, $25 \cdot 5 + 10 \cdot 2{,}5 + 25\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 400$ кН·м, 400 кН·м = 400 кН·м. Выснова: праверка здавальняючая, памылак у разліках няма. Цяпер, пры неабходнасці, вызначаюцца рэакцыі X_D, Y_D з умоў раўнавагі $\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$.

У прыведзеным прыкладзе разгледжана двойчы статычна неазначальная сістэма. Каб больш абгрунтавана ацаніць апісаны метад сілавога аналізу жорстка-пругкіх сістэм паглядзім, ці істотна ўскладняецца іх разлік пры павелічэнні колькасці стрыжняў. Для гэтай мэты на рысунку 5 дабаўляем стрыжань *4* з параметрамі, як у стрыжня *1*; $h_4 = 10$ м. Адпаведны яму радок 4 змешчаны ў канцы табліцы 2. Вылічваем новыя характарыстыкі сістэмы па формуле $p_{\sum D} = M_D / c_\varphi =$ $2{,}22 \cdot 10^{-4}$. $c_\varphi = \sum_{i=1}^{4} \overline{c_i} = 180 \cdot 10^7$ Н · м. Адпаведныя ім значэнні сіл N_i змешчаны ў графе 6 у дужках. Як бачым, разлік ускладняецца не істотна. А каб улічыць дадаткова стрыжань *4* з дапамогай тыпавой методыкі, давялося б скласці і рашыць сістэму алгебраічных ураўненняў 4-га парадку.

Некаторыя ўласцівасці механічных сістэм B і D. Кожная з сістэм утворана з аднаго цвёрдага цела і сукупнасці пругкіх сувязей. Аб’екты A аднарухомыя, г. зн. што пры адсутнасці пругкіх элементаў накладзеныя на іх сувязі B ці D дапускаюць адну ступень свабоды — паступальнае ці вярчальнае перамяшчэнні. Абедзве сістэмы характарызуюцца пастаяннымі параметрамі жорсткасці c_x (Н/м) або c_φ (Н/м) і пастаяннымі нагружанасцямі $p_{\sum B}$ (м) ці $p_{\sum D}(\delta / p)$. У сістэме B сувязі тыпаў E, K можна перамяшчаць паралельна без змянення рэакцый. Дапускаецца адвольны перанос сувязі L. Пры павароце сувязей E і K вакол шарніраў, замацаваных на аб’екце A, на вугал 180° змяняецца знак рэакцыі і дэфармацыі. Аб’ект A можна абсталяваць дадатковымі сувязямі B_1, B_2, …, якія не ўплываюць на яго рухомасць (на рысунку 3 вось $B_1x_1 \parallel Bx$). У сістэме D на велічыню рэакцый стрыжняў і спружын K не уплывае іх перамяшчэнне ўздоўж восей. З формулы (8), калі ўлічыць залежнасць $c_i' = c_i'h_i$, можна заўважыць, што сілы N_i у аднолькавых стрыжняў прапарцыянальны адлегласцям a восей ад цэнтра D. Гэта можна ўбачыць і ў графе 6 табліцы 2, дзе $N_4 = 2\,N_1$ пры $h_4 = 2\,h_1$. З той жа графы можна пераканацца, што павелічэнне колькасці стрыжняў у сістэме вядзе да натуральнага памяншэння велічынь унутраных сіл N_i.

Заключэнне. Альтэрнатыўны метад сілавога аналізу жорстка-пругкіх механічных сістэм з выкарыстаннем тэарэмы нагружанасцей дазваляе больш эфектыўна і ў кароткія тэрміны праводзіць даследаванне вызначанага класу вучэбных і тэхнічных праблем. Да таго ж, адсутнасць у методыцы даследавання этапаў складання статычных, геаметрычных і фізічных залежнасцей дазваляе пазбегнуць у разліках найбольш распаўсюджаных памылак. Апісаны метад можа быць эфектыўна выкарыстаны як у вучэбнай і вучэбна-даследчай дзейнасці, так і ў праектаванні інжынерных канструкцый.

Спіс цытаваных крыніц

1. Механика материалов / Н. С. Траймак [и др.]. — Минск : Технопринт, 2002. — 194 с.

2. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. — 2-е изд. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. — Т. 1. — 272 с.

Поступила в редакцию 15.05.2017